R1. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Determineu els valors de x, y que satisfan

$$A^2 + xA + yI = N,$$

on I i N són la matriu identitat i la matriu nul·la d'ordre 2.

L'equació matricial amb dues incògnites (x, y) de l'enunciat conté 4 equacions escalars que resulten d'igualar els 4 coeficients de les matrius 2x2. Calculant els productes de l'equació tenim:

$$\begin{pmatrix} 2+2x+y & 5+x \\ -10-2x & 7+3x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les equacions corresponents als coeficients 12 y 21 son equivalents y permeten calcular:

$$5 + x = 0 \Leftrightarrow x = -5.$$

De l'equació del coeficient 11 tenim doncs

$$2 + 2x + y = -8 + y = 0 \Leftrightarrow y = 8.$$

Els valors $x = -5$, $y = 8$ verifiquen també l'equació del coeficient 22 i per tant són la solució. $\square$

R2. Si $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $A \neq 0$ i $x \in \mathbb{R}$, determineu aquests elements per tal que es compleixi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot A.$$

Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, calculem els productes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+xc & 3b+xd \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+4c & 2b+4d \\ 6a+8c & 6b+8d \end{pmatrix}.$$

Igualant les dues matrius resultants obtenim les 4 equacions següents:

$$\begin{aligned} a+2c &= 2a+4c \Leftrightarrow a=-2c && (1)\\ b+2d &= 2b+4d \Leftrightarrow b=-2d && (2)\\ 3a+xc &= 6a+8c \Leftrightarrow c(x-2)=0 \Leftrightarrow c=0 \text{ ó } x=2 && (3)\\ 3b=xd &= 6b+8d \Leftrightarrow d(x-2)=0 \Leftrightarrow d=0 \text{ ó } x=2 && (4) \end{aligned}$$

i tenim les següents possibilitats:

- Si $x=2$, llavors les úniques condicions independents són $a=-2c$ i $b=-2d$ i per tant $A=\begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}$, $\forall c,d \in \mathbb{R}$.
- Si $x \neq 2$, llavors $c=d=0$ i de les equacions (1) i (2) resulta també $a=b=0$ i tenim que $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, independentment del valor de x.

En resum, la solució és:

$$\left(x=-2 \text{ i } \forall c,d\in\mathbb{R} \;\; A=\begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix},\; x\neq 2 \text{ i } A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

$\square$

R3. Donades les matrius

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

efectueu les operacions següents, si són possibles: $A+B, A-B, 2A-3B, A\cdot B^{\mathrm{T}}, A^{\mathrm{T}}\cdot B, A\cdot B, B\cdot A$.

Resultats:

- $A+B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

- $A - B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
- $2A - 3B = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 7 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$
- $A \cdot B^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$
- $A^{\mathrm{T}} \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$
- $A \cdot B$ no és possible.
- $B \cdot A$ no és possible.

□

R4. Calculeu la matriu $A^3 - 3A^2 - 5A + 2I$ en els casos:

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Resultats:

$$(1) \quad \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \qquad (2) \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 13 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

□

R5. Comproveu que les matrius del tipus $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$ commuten per al producte.

Hem de veure que $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$ es cumpleix que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

D'una banda tenim que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ bc+ad & bd+ac \end{pmatrix},$$

i d'altra banda resulta que

$$\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca+db & cb+da \\ da+cb & db+ca \end{pmatrix}.$$

Per la propietat commutativa de la suma i producte de reals la igualtat queda provada. □

R6. Si $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, simplifiqueu l'expressió:

$$(A+B-I)\cdot(A-B+I)+(A+2B)\cdot(B-A)\,.$$

Resultat: $B(2B-A-2I)-I$

□

R7. Determineu totes les matrius de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tals que el seu quadrat és la matriu unitat I_2.

Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, llavors

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} a^2+bc & = & 1 & (1) \\ ab+bd & = & 0 \Leftrightarrow b(a+d)=0 \Leftrightarrow b=0 \text{ o } a=-d & (2) \\ ca+dc & = & 0 \Leftrightarrow c(a+d)=0 \Leftrightarrow c=0 \text{ o } a=-d & (3) \\ bc+d^2 & = & 1 & (4) \end{array} \right.$$

Tenim llavors les següents possibilitats:

Cas 1: $\boxed{b=0}$

En aquest cas, de l'equació (1) tenim $a^2=1 \Leftrightarrow a=\pm 1$ i de l'equació (4) $d^2=1 \Leftrightarrow d=\pm 1$. Per verificar l'equació restant (3) tenim llavors dues possibilitats:

Cas 1.1: $\boxed{c=0}$

En aquest cas, les solucions són:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cas 1.2: $\boxed{c\neq 0}$

En aquest cas necessàriament ha de ser $a=-d$ i per tant les solucions són, $\forall c\in\mathbb{R}, c\neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

Cas 2: $\boxed{b\neq 0}$

Per verificar l'equació (2) ha de ser $a=-d$, i llavors l'equació (3) es verifica automàticament. De l'equació (1) tenim $bc=1-a^2 \Leftrightarrow c=(1-a^2)/b$ i per tant, la solució és:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ (1-a^2)/b & -a \end{pmatrix}$$

En resum, les matrius de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tals que el seu quadrat és la matriu unitat I_2 són $\forall a,b,c\in\mathbb{R}, b\neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ (1-a^2)/b & -a \end{pmatrix}$$

$\square$

R8. Dues matrius es diuen que commuten amb el producte si es compleix $AB=BA$. Trobeu totes les matrius de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que conmuten amb el producte amb la matriu $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Hem de trobar $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tals que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

es a dir, tals que

$$\begin{pmatrix} a+3b & 2a+4b \\ c+3d & 2c+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} a+3b & = & a+2c & \Leftrightarrow & 3b = 2c \\ 2a+4b & = & b+2d & \Leftrightarrow & 2d = 2a+3b = 2a+2c \Leftrightarrow d = a+c \\ c+3d & = & 3a+4c & \Leftrightarrow & 3d = 3a+3b \Leftrightarrow d = a+c \\ 2c+4d & = & 3b+4d & \Leftrightarrow & 3b = 2c \end{array} \right.$$

Per tant, les quatre condicions es redueixen a $d = a + c$ i $3b = 2c$. Les solucions tenen llavors dos paràmetres, p.e. $a, c \in \mathbb{R}$, i es poden escriure com:

$$\begin{pmatrix} a & 2c/3 \\ c & a+c \end{pmatrix}.$$

$\square$

R9. Determineu el rang de les matrius

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -6 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & -3 & -5 \\ 3 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$$

Resultats: 3,2,4,3,3,4,3,2,3,4,

- $$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & a^2+a-2 \end{pmatrix}$$
  - si $a \neq 1$ i $a \neq -2$, rang $= 3$
  - si $a = 1$, rang $= 1$
  - si $a = -2$, rang $= 2$
- $$\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & a^2-a+2 \\ 0 & 0 & a^3+3a \end{pmatrix}$$
  - si $a \neq 0$, rang $= 3$
  - si $a = 0$, rang $= 2$

$\square$

R10. Troba, si és possible, les matrius inverses de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Resultats:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ singular }, \frac{1}{38}\begin{pmatrix} 9 & -14 & 13 & -2 \\ 17 & 20 & -5 & -8 \\ -1 & 10 & 7 & -4 \\ -6 & -16 & 4 & 14 \end{pmatrix}, \text{ singular },$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -10 & -1 \\ -2 & 8 & 2 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 5/2 & 2 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -4 & -4 & 6 & -2 \\ -6 & 2 & 1 & 1 \\ -10 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

R11. Donades les matrius $\mathbb{I}_4$ i A:

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

calcula: la inversa de $\mathbb{I}_4 - A$, La inversa de $\mathbb{I}_4 + A$, $(\mathbb{I}_4 + A)(\mathbb{I}_4 - A)^{-1}$.

Resultats:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

R12. Demostra que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$. Comprova-ho en el cas particular:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Per demostrar que la matriu $B^{-1} \cdot A^{-1}$ és l'inversa de $A \cdot B$ fem servir la definició d'inversa, es a dir,

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

i, per tant, $B^{-1} \cdot A^{-1} = (A \cdot B)^{-1}$.

Fem la comprovació pel cas particular de l'enunciat:

$$B^{-1}\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/2\\ 1/8 & 5/8 & -1\\ 3/8 & -1/8 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 1/2\\ -3/2 & -3/2 & 1\\ 1/2 & 1/2 & 0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 3/8 & -1/8\\ -3/2 & -25/16 & 11/16\\ 0 & -3/16 & 1/16\end{pmatrix}.$$

$$(A\cdot B)^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4\\ 6 & 2 & -10\\ 18 & 6 & -14\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & 3/8 & -1/8\\ -3/2 & -25/16 & 11/16\\ 0 & -3/16 & 1/16\end{pmatrix}.$$

$\square$

R13. Aplicant la definició, calculeu el determinant de les matrius següents:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\\ -5 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -3\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Resultats: 13,0,-24.

$\square$

R14. Calculeu els següents determinants, transformant-los prèviament en d'altres més simples:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4\\ 3 & -2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 3 & 4\\ -2 & 4 & 0 & 5\end{vmatrix},\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ 1 & 1 & a & 1\\ 1 & 1 & 1 & a\end{vmatrix}.$$

Resultats: -286,2,$(a+3)(a-1)^3$. $\square$

R15. Comproveu que:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c-a \\ 1 & b & a+b+c-b \\ 1 & c & a+b+c-c \end{vmatrix} =$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix}}_{=0\ (c_3=(a+b+c)\cdot c_1)} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & a & -a \\ 1 & b & -b \\ 1 & c & -c \end{vmatrix}}_{=0\ (c_3=-c_2)} = 0$$

□

R16. Demostreu, sense calcular els determinants, l'igualtat:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} abc & a^2 & a^3 \\ abc & b^2 & b^3 \\ abc & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

□

R17. Raoneu, sense aplicar la regla de Sarrus, que les arrels del següent polinomi són $5, 7$ i -12:

$$p(x) = \begin{vmatrix} x & 7 & 7 \\ 7 & x & 5 \\ 5 & 5 & x \end{vmatrix}$$

El determinant de l'enunicat és un polinomi de tercer grau i per tant té tres arrels en $\mathbb{C}$ (es a dir tres valors de x que fan zero el determinant). Per veure que els valors donats són arrels del polinomi només hem de comprovar que fan zero el determinant i com ens donen tres valors, aquests seran les tres arrels del polinomi.

- $p(5) = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 7 \\ 7 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$ per que $c_2 = c_3$.
- $p(7) = \begin{vmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 5 \\ 5 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$ per que $c_1 = c_2$.
- $p(-12) = \begin{vmatrix} -12 & 7 & 7 \\ 7 & -12 & 5 \\ 5 & 5 & -12 \end{vmatrix} = 0$ per que $f_1 = -(f_2 + f_3)$.

$\square$

R18. Raoneu sense calcular-lo si serà nul o no el determinant de les matrius següents:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -3 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -6 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

- $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3/5 \end{vmatrix} = 0$, per que $f_1 = 5f_2$.
- $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$, per que $c_3 = 2c_1 + c_2$.
- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -3 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -6 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$, per que $f_4 = f_1 + f_2 + f_3$.

$\square$

R19. Sabent que els nombres 204, 527, 255 són múltiples de 17, demostreu que també ho és el determinant:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}.$$

$\square$

R20. Demostreu sense desenvolupar el determinant i aplicant només les propietats dels determinants, que:

$$\begin{vmatrix} x & 3 & 3 & 3 \\ 3 & x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & x & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-9).$$

Veiem que el determinant és un polinomi de tercer grau amb coeficient director 1 i per tant es pot escriure com $(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$, on $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{C}$ són les tres arrels del polinomi. Només hem de veure llavors que $r_{1,2,3} = 2, 3, 9$, es a dir, que el detarminant es fa zero per aquests valors.

- $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, per que $c_2 = c_3$.
- $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, per que $c_1 = c_2$.
- $\begin{vmatrix} 9 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 9 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 9 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, per que $c_3 = c_4$.

$\square$

R21. Discutiu i resoleu els següents sistemes d'equacions lineals:

(a) $x + y + z = 6$
$2x - y = 0$
$3y - 2z = 0$

(b) $2x + 3y + z = 4$
$x - 2y + z = -2$
$8x + 5y + 5z = 1$

(c) $x - 2y + z - t = 1$
$2x + y + 3z = 2$
$-x + 3y - z + 4t = -1$

(d) $x + 2y - z = 1$
$x + y + 3z = 0$
$x + 7z = -1$

(e) $3x - 2y + 2z = 4$
$2x + y - 3z = 1$
$x - 3y + 4z = 2$

(f) $2x + y + 3z = 0$
$-2x - y = 1$
$z = 2$

(g) $x + y - z + 2u = 0$
$2x - y - t = 1$
$3x - z + t = 1$

(h) $x + y + z = 3$
$x + 2y - 4z = 1$

(i) $x - 2y + z + 2t = 2$
$-2x + y + 3z - t = 0$
$3x - y - 2z - t = 2$
$-x + 5y - z - 3t = -1$

(j) $x + 2y = 1$
$2x - z = 1$
$x + y - z = 0$
$x - y + 2z = 3$

(k) $x + y + z = 1$
$2x - 2y - z = 0$
$x + 3y + 5z = 2$
$5x + 3y + 6z = 4$

Resultats:

(a) {1,2,3}

(b) S.I.

(c) $\{1 - \frac{18}{13}z, -\frac{3}{13}z, z, \frac{1}{13}z\}, \forall z \in \mathbb{R}$

(d) $\{-1 - 7z, 1 + 4z, z\}$

(e) $\{\frac{10}{7}, \frac{8}{7}, 1\}$

(f) $\{0, 2, 3\}$

(g) $\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} - z, z, z\}, \forall z \in \mathbb{R}$

(h) $\{5 - 6z, -2 + 5z, z\}$

(i) $\{\frac{37}{25}, \frac{2}{5}, \frac{23}{25}, \frac{1}{5}\}$

(j) $\{1, 0, 1\}$

(k) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\}$

□

R22. Discutiu, segons el valor d'$a \in \mathbb{R}$, els següents sistemes d'equacions i trobeu les solucions en cas d'existir.

(a) $a^2x + y + z = 3$
$x + a^2y + z = 4 - a$
$x + y + a^2z = 2 + a^2$

(b) $(1-a)\,x + y = 0$
$(1-a)\,y + z = 0$
$x + (1-a)\,z = 0$

(c) $ax - 2y + 4z = a + 2$
$x - y + 2z = a$
$-2x + 2y + 2az = -4$

(d) $ax + 3y + z = 2$
$3x + ay + 2z = 3$
$-x + y - z = 1$

(e) $2x + y - az = 1$
$3x + 2y + z = a$
$2x + y + z = -a$

(f) $ax + y + 2z = 1$
$x + ay + z = a$
$x + 2y + z = a$

(g) $ax + 2z = 1$
$x + y + (a+1)z = 2$
$2x - y + 4z = a$

(h) $3x - 2y + z = 1$
$4x + y - 2z = 2$
$2x - 5y - az = 3$

Resultats:

(a)
- si $a = 1$, $\{3 - y - z, y, z\}$
- si $a = -1$, $\nexists$ solución (S.I.)
- si $a \neq \pm 1$ $\{\frac{2a+3}{(a+1)(2+a^2)}, -\frac{a^2-2a-1}{(a+1)(2+a^2)}, \frac{a^3+a^2+4a+5}{(a+1)(2+a^2)}\}$

(b)
- si $a = 2$, $\{x, x, x\}$
- si $a \neq 2$, $\{0, 0, 0\}$

(c) Podem escriure el sistema en forma matricial com:

$$\begin{pmatrix} a & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2 \\ a \\ -4 \end{pmatrix}$$

Veiem per què valors del paràmetre a es fa zero el determinant de la matriu associada al sistema

$$\begin{vmatrix} a & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 2a \end{vmatrix} = -2a^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

Podem diferenciar llavors els següents casos:

Cas 1: $\boxed{a \neq \pm 2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & -2 & 4 & a+2 \\ 1 & -1 & 2 & a \\ -2 & 2 & 2a & -4 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} a & -2 & 4 & a+2 \\ 0 & -1 & 2 & a+1 \\ 0 & 0 & a+2 & a-2 \end{array}\right) \sim$$

$$\ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{a^2+a+6}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a-2}{a+2} \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{a^2+a+6}{a+2} \\ z = \frac{a-2}{a+2} \end{cases}$$

,

Cas 2: $\boxed{a = 2}$

En aquest cas la matriu ampliada es pot transformar en

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Cas 3: $\boxed{a = -2}$

En aquest cas tenim:

$$\text{rang}(A) = 2 \neq 3 = \text{rang }(A|b) \Rightarrow \text{S.I.}$$

En resum tenim:

- si $a \neq \pm 2$, $\{-1, -\frac{a^2+a+6}{a+2}, \frac{a-2}{a+2}\}$
- si $a = 2$, $\{2 + y, y, 0\}$
- si $a = -2$, S.I.

(d)

- si $a \neq 2, -3$, $\{\frac{3a-14}{(a-2)(a+3)}, \frac{5a-8}{(a-2)(a+3)}, \frac{4-a}{a-2}\}$
- si $a = 2$, S.I.

- si $a = -3$, S.I.

(e)
- si $a \neq -1$, $\{1-3a, 5a-1, -1\}$
- si $a = -1$, $\{3-z, z-5, z\}$

(f)
- si $a \neq 2$, $\{-\frac{2a-1}{a-2}, 0, \frac{a^2-1}{a-2}\}$
- si $a = 2$, $\{-z, 1, z\}$

(g)
- si $a \neq 1, -6$, $\{-\frac{1}{a+6}, -\frac{a^2+2a-10}{a+6}, \frac{a+3}{a+6}\}$
- si $a = 1$, $\{1-2z, 1, z\}$
- si $a = -6$, S.I.

(h)
- si $a \neq -4$, $\{\frac{5a+11}{11(a+4)}, \frac{2(a-11)}{11(a+4)}, -\frac{3}{a+4}\}$
- si $a = -4$, S.I.

$\square$

R23. Discutiu els sistemes d'equacions lineals següents en funció dels paràmetres reals $a, b \in \mathbb{R}$. Resoleu-lo en els cassos en què sigui possible.

(a)
$$\begin{aligned} ax + y + z &= b \\ x + ay + z &= b \\ x + y + az &= b \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} ax + by + z &= 1 \\ x + aby + z &= b \\ x + by + az &= 1 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} ax + y - z &= 1 \\ x - ay + z &= 4 \\ x + y + az &= b \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 3ax + 4y - 2az &= 3b + 2 \\ -ax - y + az &= -b \\ -ax - 2y + az &= -b - 1 \end{aligned}$$

Resultats:

(a)
- si $a = 1$, $\forall b \in \mathbb{R}$, S.C.I., $\{b-y-z, y, z\}$
- si $a = -2$ i $b = 0$, S.C.I.,$\{x, x, x\}$
- si $a = -2$ i $b \neq 0$, S.I.
- si $a \neq 1, -2$, $\forall b \in \mathbb{R}$, S.C.D.,$\{\frac{b}{a+2}, \frac{b}{a+2}, \frac{b}{a+2}\}$

(b)
- si $b = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$, S.I.
- si $a = 1$ i $b = 1$, S.C.I., $\{1-y-z, y, z\}$

- si $a=1$ i $b\neq 1,0$, S.I.
- si $a=-2$ i $b=-2$, S.C.I., $\{x,-\frac{1}{2}(1+x),x\}$
- si $a=-2$ i $b\neq -2,0$, S.I.
- si $a\neq 1,-2$, $\forall b\in\mathbb{R}, b\neq 0$, S.C.D., $\{\frac{a-b}{(a-1)(a+2)},\frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)},\frac{a-b}{(a-1)(a+2)}\}$

(c)
- si $a=0$ i $b=5$, S.C.I., $\{4-z,1+z,z\}$
- si $a=0$ i $b\neq 5$, S.I.
- si $a\neq 0$, $\forall b\in\mathbb{R}$, S.C.D., $\{\frac{a^2+ab+4a+5-b}{a(a^2+3)},-\frac{4a^2-a-ab-b+5}{a(a^2+3)},\frac{3a-5+a^2b+b}{a(a^2+3)}\}$

(d) Considerem la matriu ampliada associada al sisitema i fent-hi l'eliminació de Gauss obtenim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3a & 4 & -2a & 4+b \\ -a & -1 & a & -1 \\ -a & -2 & a & -2 \end{array}\right)\sim\ldots\sim\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -a & 0 & -b \\ 0 & 0 & a & b \end{array}\right)$$

Podem diferenciar llavors els següents casos:

Cas 1: $\boxed{a=0}\Rightarrow \text{rang}(A)=1$

Cas 1.1: $\boxed{b=0}\Rightarrow \text{rang}(A|B)=1$
Tenim llavors que el sistema és compatible indeterminat (S.C.I.) i les solucions són:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=y \\ z=z \end{array}\right.$$

Cas 1.2: $\boxed{b\neq 0}\Rightarrow \text{rang}(A|B)=3$ i per tant el sistema és incompatible (S.I.)

Cas 2: $\boxed{a\neq 0}\Rightarrow \text{rang}(A)=3$
Podem veure també que $\text{rang}(A|B)=3$, $\forall b\in\mathbb{R}$, i per tant el sistema és compatible determinat (S.C.D.) i la

solució és, $\forall b \in \mathbb{R}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -a & 0 & -b \\ 0 & 0 & a & b \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = b/a \\ z = b/a \end{array}\right.$$

En resum tenim:

- si $a \neq 0$, $\forall b \in \mathbb{R}$, S.C.D., $\{1, b/a, b/a\}$
- si $a = 0$ i $b = 0$, S.C.I., $\{1, y, z\}$
- si $a = 0$ i $b \neq 0$, S.I.

$\square$